Übungen zur Faktorzerlegung quadrastischer Gleichung mit ausführlicher Lösung

Faktorisieren Sie:

Aufgaben 1 bis 5 haben für x^2 den Koeffizienten 1: Trial and Error führen leicht zum Ziel

Aufgabe 1

$x^2 + 8 \cdot x + 7$

$$x^2 + 8\,x + 7 \qquad (1)$$

$factor(\%)$

$$(x + 7)\,(x + 1) \qquad (2)$$

$Koeffizient\ c = 7$

$$Koeffizient\ c = 7 \qquad (3)$$

$u \cdot v = 7;\ u + v = 8;$

$$u\,v = 7$$
$$u + v = 8 \qquad (4)$$

wird erfüllt durch u=7 und v=1; Lösung (x+u)*(x+v)

Aufgabe 2

$x^2 + 6 \cdot x - 7$

$$x^2 + 6\,x - 7 \qquad (5)$$

Koeffizient c=7

$u \cdot v =-7; u + v = 6$

$$u\,v = -7$$
$$u + v = 6 \qquad (6)$$

wird erfüllt durch u=7 und v=-1; Lösung (x+u)*(x+v)

$factor(\mathbf{(5)})$

$$(x + 7)\,(x - 1) \qquad (7)$$

Aufgabe 3

$x^2 + 7 \cdot x + 10$

$$x^2 + 7\,x + 10 \qquad (8)$$

Koeffizient c=10

$u \cdot v = 10; u + v = 7$

$$u\,v = 10$$
$$u + v = 7 \qquad (9)$$

wird erfüllt durch u=5 und v=2; Lösung (x+u)*(x+v)

$factor(\mathbf{(8)})$

$$(x + 5)\,(x + 2) \qquad (10)$$

Aufgabe 4

$x^2 - 6 \cdot x + 9$

$$x^2 - 6x + 9 \quad (11)$$

Koeffizient c=9

$u \cdot v = 9; u + v = -6$

$$u\,v = 9$$
$$u + v = -6 \quad (12)$$

wird erfüllt durch u=-3 und v=-3; Lösung (x+u)*(x+v)

$factor(\mathbf{(11)});$

$$(x-3)^2 \quad (13)$$

Aufgabe 5

$x^2 + 5 \cdot x + 6$

$$x^2 + 5x + 6 \quad (14)$$

$u \cdot v = 6; u + v = 5$

$$u\,v = 6$$
$$u + v = 5 \quad (15)$$

wird erfüllt durch u=6 und vwird erfüllt durch u=6 und v=-1; Lösung (x+u)*(x+v)=-1; Lösung (x+u)*(x+v)

$factor(\mathbf{(14)})$

$$(x+3)\,(x+2) \quad (16)$$

Aufgaben 6 bis 12 haben für x^2 einen Koeffizienten a ungleich 1: modifizierter Trial and Error sind ein möglicher Weg, ggf.
auf Substitutionsmethode ausweichen.

Aufgabe 6

$2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1$

$$2x^2 + 3x + 1 \quad (17)$$

$a \cdot c = 2 \cdot 1$

$$a\,c = 2 \quad (18)$$

$u \cdot v = 2; u + v = 3$

$$u\,v = 2$$
$$u + v = 3 \quad (19)$$

wird erfüllt durch u=2 und v=1

Der lineare Part 3x wird aufgesplittet in 2*x+x und die Gleichung umgeschrieben in 2*x^2+2*x+x+1= 2*x*(x+1)+(1)*(x+1)

$factor(\mathbf{(17)});$

$$(x+1)\,(2x+1) \quad (20)$$

Aufgabe 7

$2\cdot x^2 + 4\cdot x + 2$

$$2\,x^2 + 4\,x + 2 \tag{21}$$

$a\cdot c = 2\cdot 2$

$$a\,c = 4 \tag{22}$$

$u\cdot v = 4;\ u + v = 4$

$$u\,v = 4$$
$$u + v = 4 \tag{23}$$

wird erfüllt durch u=2 und v=2

Der lineare Part 4x wird aufgesplittet in 2*x+2*x und die Gleichung umgeschrieben in 2*x^2+2*x+2*x+2=2*x*(x+1)+(2)*(x+1)

$factor(\mathbf{(21)});$

$$2\,(x+1)^2 \tag{24}$$

Aufgabe 8

$3\cdot x^2 - 3\cdot x - 6$

$$3\,x^2 - 3\,x - 6 \tag{25}$$

$a\cdot c = 3\cdot(-6)$

$$a\,c = -18 \tag{26}$$

$u\cdot v = 18;\ u + v = -3$

$$u\,v = 18$$
$$u + v = -3 \tag{27}$$

wird erfüllt durch u=-6 und v=3

Der lineare Part -3*x wird aufgesplittet in -6*x+3*x und die Gleichung umgeschrieben in 3*x^2-6*x+3*x-6=3*x*(x-2)+(3)*(x-2)

$factor(\mathbf{(25)})$

$$3\,(x+1)\,(x-2) \tag{28}$$

Aufgabe 9

$5\cdot x^2 - 4\cdot x - 1$

$$5\,x^2 - 4\,x - 1 \tag{29}$$

$a\cdot c = 5\cdot(-1)$

$$a\,c = -5 \tag{30}$$

$u\cdot v = 5;\ u + v = -4$

$$u\,v = 5$$
$$u + v = -4 \tag{31}$$

wird erfüllt durch u=-5 und v=1

Der lineare Part -4*x wird aufgesplittet in -5*x+x und die Gleichung umgeschrieben in 5*x^2-5*x+x-1=5*x*(x-1)+(1)*(x-1)

$factor(\mathbf{(29)});$

$$(5\,x+1)\,(x-1) \tag{32}$$

Aufgabe 10

$16\cdot x^2 - 1$

$$16\,x^2 - 1 \tag{33}$$

Binomische Formel: (4*x)^2=16*x^2 und 1*1=1

factor((**33**));

$$(4\,x-1)\,(4\,x+1) \tag{34}$$

$6\cdot x^2 + 31\cdot x + 35$

$$6\,x^2 + 31\,x + 35 \tag{35}$$

$a\cdot c = 6\cdot 35;$

$$a\,c = 210 \tag{36}$$

ifactor(210)

$$(2)\,(3)\,(5)\,(7) \tag{37}$$

$u\cdot v = 210;\ u + v = 31;$

$$u\,v = 210$$

$$u + v = 31 \tag{38}$$

wird erfüllt durch u=10 und v=21

Der lineare Part 31x wird aufgespaltet 21*x+10*x und die Gleichung umgeschrieben in 6*x^2+10*x+21*x+35=2*x*(3*x+5)+7*(3*x+5);

factor((**35**));

$$(2\,x+7)\,(3\,x+5) \tag{39}$$

Aufgabe 12

$14\cdot x^2 - 127\cdot x - 57;$

$$14\,x^2 - 127\,x - 57 \tag{40}$$

Wir wenden hier nun, zur Demonstration,die Substutionsmethode an, Dazu multiplizieren wir die Gleichung mit 14 (also mit dem Koeffizienten a)
14*x*14*x-127*14*x-14*57 und erhalten (14*x)^2-127*(14*x)-14*57 und substituieren 14*x=u um den folgenden Termin zu erhalten:

$u^2 - 127\cdot u - 14\cdot 57$

$$u^2 - 127\,u - 798 \tag{41}$$

ifactor(-798);

$$-(2)\,(3)\,(7)\,(19) \tag{42}$$

$u\cdot v = -2565;\ u + v = -127$

$$u\,v = -2565$$

$$u + v = -127 \tag{43}$$

wird erfüllt durch u=6 und v=-133, nicht ganz einfahc zu erkennen!

$(u+6)\cdot(u-133)$

$$(u+6)\,(u-133) \tag{44}$$

Dann führen wir die Rücksubstitution durch mit u=14*x

subs($u = 14\cdot x$, (**44**));

$$(14\,x+6)\,(14\,x-133) \tag{45}$$

Aus den beiden Klammerausdrücken können wir 2 aus der ersten Klammer und 7 aus der zweiten Klammer als Faktoren herausziehen. 2*7=14 ist
aber genau der Faktor, mit dem wir zu Beginn der Substitution den Term multipliziert haben. Die nach dem herausziehen vrbleibenden Klammer Ausdrücke sind damit genau das gewünschte Ergebnis. Falls Sie es noch nicht gemerkt haben sollten: Wir haben hiermit genau den Term faktorisiert, den wir zu

Beginn des Kurses zum "Anlocken" verwendet haben. Versprechen gehalten!

$\frac{(14\,x+6)\cdot(14\,x-133)}{14} = \frac{2\cdot(7\cdot x+3)\cdot 7\cdot(2\cdot x-19)}{2\cdot 7}$

$$\frac{(14\,x+6)\,(14\,x-133)}{14} = (7\,x+3)\,(2\,x-19) \qquad \textbf{(46)}$$

$factor(\textbf{(40)});$

$$(7\,x+3)\,(2\,x-19) \qquad \textbf{(47)}$$

Und falls Sie wirklich einmal nicht wissen, ob eine quadratische Gleichung lösbar ist und ggf. die Lösung erfahren wollen, dann verwenden Sie die für solche Fälle immer anwendbare Formel:

$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad \textbf{(48)}$$

$x = \frac{-b+\sqrt{-4\,a\,c+b^2}}{2\,a}$;

$x = \frac{-b-\sqrt{-4\,a\,c+b^2}}{2\,a}$

Bei der vorliegenden Gleichung gilt

$subs(\{a=14,\ b=-127,\ c=-57\},\ \textbf{(48)})$

$$14\,x^2 - 127\,x - 57 = 0 \qquad \textbf{(49)}$$

Setzen Sie die Zahlenwerte für a,b,c in die obige Formel ein und Sie erhalten (bitte selbst nachrechne):

$solve(\textbf{(49)}, x);$

$$\frac{19}{2},\ -\frac{3}{7} \qquad \textbf{(50)}$$

Im Klartextbedeutet dies:

$x = \frac{19}{2}$

$$x = \frac{19}{2} \qquad \textbf{(51)}$$

$2\cdot x - 19 = 0$

$$2\,x - 19 = 0 \qquad \textbf{(52)}$$

$x = -\frac{3}{7}$

$$x = -\frac{3}{7} \qquad \textbf{(53)}$$

$7\cdot x + 3 = 0$

$$7\,x + 3 = 0 \qquad \textbf{(54)}$$

Damit habe2 $x - 19$n Sie die Lösung für die Faktoren Zerlegung ebenfalls erhalten.

$(2\cdot x - 19)\cdot(7\cdot x + 3)$

$$(2\,x-19)\,(7\,x+3) \qquad \textbf{(55)}$$

Die Methode der Faktorzerlegung können Sie auch zur Vereinfachung von algebraischen Brüchen verwenden, wie z.B.

$y = \frac{(x^2 + 2\cdot x - 15)}{2\cdot x^2 - 5\cdot x - 3}$

$$y = \frac{x^2 + 2\,x - 15}{2\,x^2 - 5\,x - 3} \quad \textbf{(56)}$$

Zerlegen Sie dazu jeweils den entsprechenden Zähler und Nenner in Faktoren (das ist in solchen Fällen immer gut, z.B. wenn Sie Nullstellen (Zähler=0) oder Polstellen (Nenner=0) einer Funktion feststellen wollen.

Nenner:=

$Nenner := 2\,x^2 - 5\,x - 3; Zähler := x^2 + 2\,x - 15$

$$Nenner := 2\,x^2 - 5\,x - 3$$

$$Zähler := x^2 + 2\,x - 15 \quad \textbf{(57)}$$

$factor(Nenner)$

$$(2\,x + 1)\,(x - 3) \quad \textbf{(58)}$$

$factor(Zähler)$

$$(x + 5)\,(x - 3) \quad \textbf{(59)}$$

$\frac{Zähler}{Nenner} = \frac{factor(Zähler)}{factor(Nenner)}$

$$\frac{x^2 + 2\,x - 15}{2\,x^2 - 5\,x - 3} = \frac{x + 5}{2\,x + 1} \quad \textbf{(60)}$$