Technik der Faktorisierung

Einleitung:

Eine ganze Zahl wird faktorisiert genannt, wenn diese Zahl in Form von Faktoren zerlegt wird, bei möglicher weiterer Zerlegung von Faktoren kommt man letztlich zur Zerlegung in Primzahlen (eine Zahl, die nur durch sich selbst und 1 geteilt werden kann).

Beispiele dafür

$ifactor(2)$

$$(2) \tag{1}$$

$ifactor(21)$

$$(3)\ (7) \tag{2}$$

$ifactor(100);$

$$(2)^2\ (5)^2 \tag{3}$$

$ifactor(5633)$

$$(43)\ (131) \tag{4}$$

Die Zerlegung von Zahlen für die Bereiche, in denen es zum Beispiel in der Bruchrechnung (Ermittlung des Größten Gemeinsamen Nenners durch Zerlegung des Nenners und des Zahlers in Primzahlen) kommt, sind in der Regel durch Ausprobieren leicht zu ermitteln.

$\frac{56}{104}$

$$\frac{7}{13} \tag{5}$$

Primzahlzerlegung Zähler:
$ifactor(56)$

$$(2)^3\ (7) \tag{6}$$

Primzahlzerlegung Nenner
$ifactor(104)$

$$(2)^3\ (13) \tag{7}$$

Algebraische Ausdrücke können auch faktorisiert werden (hier werden bei 7*(2*x+1) die Klammern aufgelöst.
$7 \cdot (2 \cdot x + 1)$

$$14\, x + 7 \tag{8}$$

Die beiden Ausdrücke mit/ohne Klammern sind mathematisch äquivalent. Die Faktorisierung ist der Umkehrung der Ausmultiplikation von Klammern.Der obige

Ausdruck hat die Faktoren 7 und (2*x+1).

Weitere Grundlegende Beispiele der Faktorisierung von einfachen mathematischen Termen

Dabei sollte die Lösung durch entfernen der Klammern imm geprüft werden.

$$factor\left(z^2 - 5 \cdot z\right)$$

$$z\,(z-5) \tag{9}$$

$$factor(6 \cdot x - 12 \cdot x \cdot y)$$

$$-6\,x\,(2\,y-1) \tag{10}$$

$$factor(a + a \cdot b)$$

$$a\,(b+1) \tag{11}$$

$$factor(x \cdot y + x \cdot y \cdot z)$$

$$x\,y\,(z+1) \tag{12}$$

$$factor\left(9 \cdot x^2 - 12 \cdot x\right)$$

$$3\,x\,(3\,x-4) \tag{13}$$

$$factor\left(4 \cdot x^2 + 3 \cdot y \cdot x^2 + 5 \cdot y \cdot x^4\right);$$

$$x^2\left(5\,y\,x^2 + 3\,y + 4\right) \tag{14}$$

Methoden der Faktorisierung von quadratischen Ausdrücken

Ein quadratischer Ausdruck in x, ist ein Ausdruck der Form

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$a\,x^2 + b\,x + c \tag{15}$$

wobei a der Koeffizient von x^2, b der Koeffizient von x und c der konstante Term genannt wird.

Um zu sehen, wie wir einen quadratischen Term faktorisieren, der den Koeffizienten a=1 hat,expandieren wir den folgenden Ausdruck

$$(x+m) \cdot (x+n)$$

$$(x+m)\,(x+n) \tag{16}$$

$$expand(\textbf{(16)})$$

$$m\,n + m\,x + x\,n + x^2 \tag{17}$$

$$x^2 + (m+n) \cdot x + m \cdot n$$

$$x^2 + (m+n)\,x + m\,n \tag{18}$$

Dies bedeutet, dass der Koeffizient von x gleich (m+n) ist und der konstante Termin das Produkt von m*n ist.

Darauf beruht die

Methode Trial and Error

$x^2 + 4\cdot x - 5$

$$x^2 + 4\,x - 5 \tag{19}$$

Wir suchen also Zahlen für m,n bei denen m+n=4 und m*n=5 ist.
In diesem Fall ist es nicht schwierig heraus zu finden, dass dies für die Zahlen m=5 und n=-1 der Fall ist.

factor(

$factor(x^2 + 4\cdot x - 5)$

$$(x+5)\,(x-1) \tag{20}$$

oder

$factor(x^2 + 6\cdot x + 8)$

$$(x+4)\,(x+2) \tag{21}$$

Wenn der Koeffizient von x^2 nicht gleich eins ist, kann es möglich sein, diesen Koeffizienten vor eine Klammer zu stellen und damit in der Klammer wiederum einen Ausdruck mit a=1 zu erhalten. Lösung dann grundsätzlich ebenfalls wie oben

$factor(3\cdot x^2 + 18\cdot x + 24)$

$$3\,(x+4)\,(x+2) \tag{22}$$

Methode Substitution um einen Ausdruck für die Ersatzvariable auf a=1 zu überführen.

Nicht jeder quadratische Ausdruck hat eine Faktorisierungslösung.
Dies gilt natürlich auch für den Ausdruck mit a=1.
Unter der Voraussetzung, dass es überhaupt eine Lösung gibt, führt diese Methode immer zu einer Lösung.

$2\cdot x^2 + 5\cdot x + 3$

$$2\,x^2 + 5\,x + 3 \tag{23}$$

Der Koeffizient des Terms x^2 ist hier 2. Wir multiplizieren den ganzen Termin hier als um 2 (das erhöht den Term natürlich um 2, was wir uns merken müssen und am Ende den gefundenen Ausdruck um 2 kürzen müssen):

2*(2*x^2+5*x+3)=2*(2*x^2)+2*(5*x)+2*3=(2*x)^2+5*(2*x)+6

Dann füren wir für den vorliegenden Ausdruck die entsprechende Substitutionsvariable ein, hier 2*x=z und erhalten für den Inhalt der Klammer folgenden neuen Ausdruck

$z^2 + 5\cdot z + 6$

$$z^2 + 5\,z + 6 \tag{24}$$

$factor(\textbf{(24)})$

$$(z+3)\,(z+2) \tag{25}$$

Rücksubstitution z=2*x

$subs(z=2\cdot x, \mathbf{(25)})$

$$(2\,x+3)\,(2\,x+2) \tag{26}$$

$2\cdot((2\cdot x+3)\cdot(x+1))$

$$2\,(2\,x+3)\,(x+1) \tag{27}$$

so dass sich ergibt

$factor\left(2\cdot x^2+5\cdot x+3\right)$

$$(2\,x+3)\,(x+1) \tag{28}$$

Sehr oft ist es einfacher, den nach der Substitution erhaltenen Ausdruck über die oben beschriebene Methode "Trial and Error" rasch zu faktorisieren. Probieren Sie es für den oben stehenden und die weiteren Beispiele einfach selbst aus.

Prüfen, ob Ausdrücke evtl. über die bekannten binomischen Formeln rückwärts angewendet gelöst werden können. Um dies zu erkennen, hilft nur Üben

$factor\left(x^2-y^2\right)$

$$(x-y)\,(x+y) \tag{29}$$

$factor\left(x^2-36\cdot z^2\right)$

$$(x-6\,z)\,(x+6\,z) \tag{30}$$

$factor\left(25\cdot x^2-9\cdot z^2\right)$

$$(5\,x-3\,z)\,(5\,x+3\,z) \tag{31}$$

$factor\left(\alpha^2-1\right)$

$$(\alpha-1)\,(\alpha+1) \tag{32}$$

Methode quadratische Ergänzung des Terms

Diese Vorgehensweise gehört eigentlich nicht zum Thema Faktorisierung (mit ganzzahligen Lösungen), sondern zur Lösung (Nullstellen Suche) beleibeiger allgemeiner quadratischer Lösungen(mit realen oder sogar imaginären Lösungen) Diese Formel wird zum Verständnis der Vorgehensweise abgeleitet und dann gezeigt, wie damit in schwierigen Fällen geprüft werden kann, ob es überhaupt eine ganzzahlige reale Lösung und damit eine Faktorisierung gibt.

Die binomische Formel (üblicherweise wird die binomische Formel mit der Konstanten a geschrieben , also $(x+a)^2=a^2+2\,a\,x+x^2$. Bei uns wird a dagegen bereits als Koeffizient von x^2 im Term $a\,x^2+b\,x+c$ verwendet, also mit einer ganz anderen Bedeutung.Durch die von u soll die Verwechslungsgefahr ausgeschlossen werden) dürfte bekannt sein:

$$(x+m)^2=x^2+2\cdot m\cdot x+m^2$$

Vergleichen wir für den allgemeinen Term der quadratischen Gleichung $x^2+\frac{b}{a}\,x+\frac{c}{a}$ nun nur den verkürzten Term $x^2+\frac{b}{a}\cdot x$ mit der oben stehenden binomischen Formel, so erkennen wir nach Nachdenken und Vergleichen, dass der verkürzte Term durch die Ergänzung/Addition von ((b/a)/2)^2 auf einen exakten quadratischen Termin ergänzt wird, der dann durch einfaches Wurzelziehen gelöst werden kann. Dabei ist bei der Wurzel dann noch + und - als Lösung der Wurzel zu beachten. Dann betrachten wir den ganzen quadratischen Term und ziehen zudem die hinzu addierte quadratische Ergänzung zur Richtigstellung am Ende des Vorgangs einfach wieder ab.

Da Sie , Sorry, jetzt wohl überhaupt nichts mehr verstehen, führen wir das ganze nun Schritt für Schritt am obigen Beispiel durch:

Quadratisch ergänzt werden soll der Term

$2\,x^2 + 5\,x + 2 = 0;$

$$2\,x^2 + 5\,x + 2 = 0 \tag{33}$$

Teilen durch 2 um den Koeffizienten a= 1 zu erhalten

$\frac{\left(2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 2 = 0\right)}{2}$

$$x^2 + \frac{5}{2}\,x + 1 = 0 \tag{34}$$

Fügen dann die quadratische Ergänzung für den Teilterm (ohne die Konstante 2) nach obigem Rezept hinzu

$x^2 + \frac{5}{2}\,x + \left(\frac{\left(\frac{5}{2}\right)}{2}\right)^2$

$$x^2 + \frac{5}{2}\,x + \frac{25}{16} \tag{35}$$

und stellen fest, dass tatsächlich richtig ist, dass wir damit einen quadratischen Ausdruck erhalten (durch die vorgenommene quadratische Ergänzung) , den wir durch Wurzel ziehen lösen können.

$\left(x + \frac{\left(\frac{5}{2}\right)}{2}\right)^2$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 \tag{36}$$

$expand(\mathbf{(36)});$

$$x^2 + \frac{5}{2}\,x + \frac{25}{16} \tag{37}$$

Nun fügen wir zum erhaltenen quadratischen Ausdruck die bisher nicht berücksichtigte Konstante der durch 2 dividierten Ausgangsgleichung hinzu und ziehen zudem, zur Korrektur, gleichzeitig die vorgenomme quadratische Ergänzung wieder ab. Die Aufgabe kann damit nun einfach und elementar gelöst werden.

$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+1-\frac{25}{16}=0;$

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}=0 \tag{38}$$

$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16} \tag{39}$$

$solve(\mathbf{(39)}, x)$

$$-\frac{1}{2}, -2 \tag{40}$$

also die Lösungen x=-1/2 und x=-2, was zu den Faktoren (x+1/2) und (x-2) führt. Dies prüfen wir nun noch nach.

$\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)=0$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=0 \tag{41}$$

$expand(\mathbf{(41)});$

$$x^2-\frac{3}{2}x-1=0 \tag{42}$$

$\mathbf{(42)}\cdot 2$

$$2x^2-3x-2=0 \tag{43}$$

Es ist also tatsächlich die zu der Faktordarstellung zu ergänzende Ausgangsgleichung. Die Methode der quadratischen Ergänzung führt immer zu zwei unterschiedlichen Lösungen oder einer identischen Doppellösung. Bei einem neagtiven Wert in der Wurzel erhalten Sie sogar eine Lösung im imaginären und nicht im realen Zahlenbereich. Von der oben beschriebenen Faktorisierung eines quadratischen Terms reden wir allerdings nur dann, wenn die sich ergebenden Lösungen beides reale Ganzzahlen sind.

Ich überlasse es nun Ihnen, die quadratische Erqänzung selbst am allgemeinen Term vorzunehmen. Die Formellösung ist zur Kontrolle angeführt, den ganz unten gezeigten Termin müssen Sie, bei quadratischer Ergänzung des direkt unten gezeigten Terms. erhalten.

ax^2+bx+c

$$ax^2+bx+c \tag{44}$$

$solve(\mathbf{(44)}, x)$

$$\frac{-b+\sqrt{-4\,a\,c+b^2}}{2\,a},\ -\frac{b+\sqrt{-4\,a\,c+b^2}}{2\,a} \tag{45}$$

Werten Sie bei einer konkreten Faktorisierungsaufgabe einfach den Wurzelterm aus, um vorab festzustellen, ob es eine Lösung im reellen Bereich und mit ganzen zahlen gibt. Dies ist dann der Fall, wenn der Wurzelterm einen entsprechende Wert ergibt:

$\sqrt{-4\,a\,c+b^2}$;

$$\sqrt{-4\,a\,c+b^2} \tag{46}$$

ich zeige dies am Beispiel des Terms, mit dem unser Abenteuer der Faktorisierung begonnen hat:

$2\,x^2+5\,x+3$

$$2\,x^2+5\,x+3 \tag{47}$$

$subs\left([a=2, b=5, c=3], \sqrt{-4\,a\,c+b^2}\right)$;

$$1 \tag{48}$$

also eine ganze reale Zahl und damit ist eine Faktorisierung wie beschrieben möglich.