Welche grundlegenden Eigenschaften haben quadratische Gleichungen

$with(plots):$
Die einfachste Form einer quadratischen Gleichung lautet

$y = x^2$

$$y = x^2 \tag{1}$$

Möchten Sie diese Gleichung in einem kartesischen Koordinaten System darstallen, stellen Sie zunächst für den zu betrachtenden Bereich eine Wertetabelle auf:

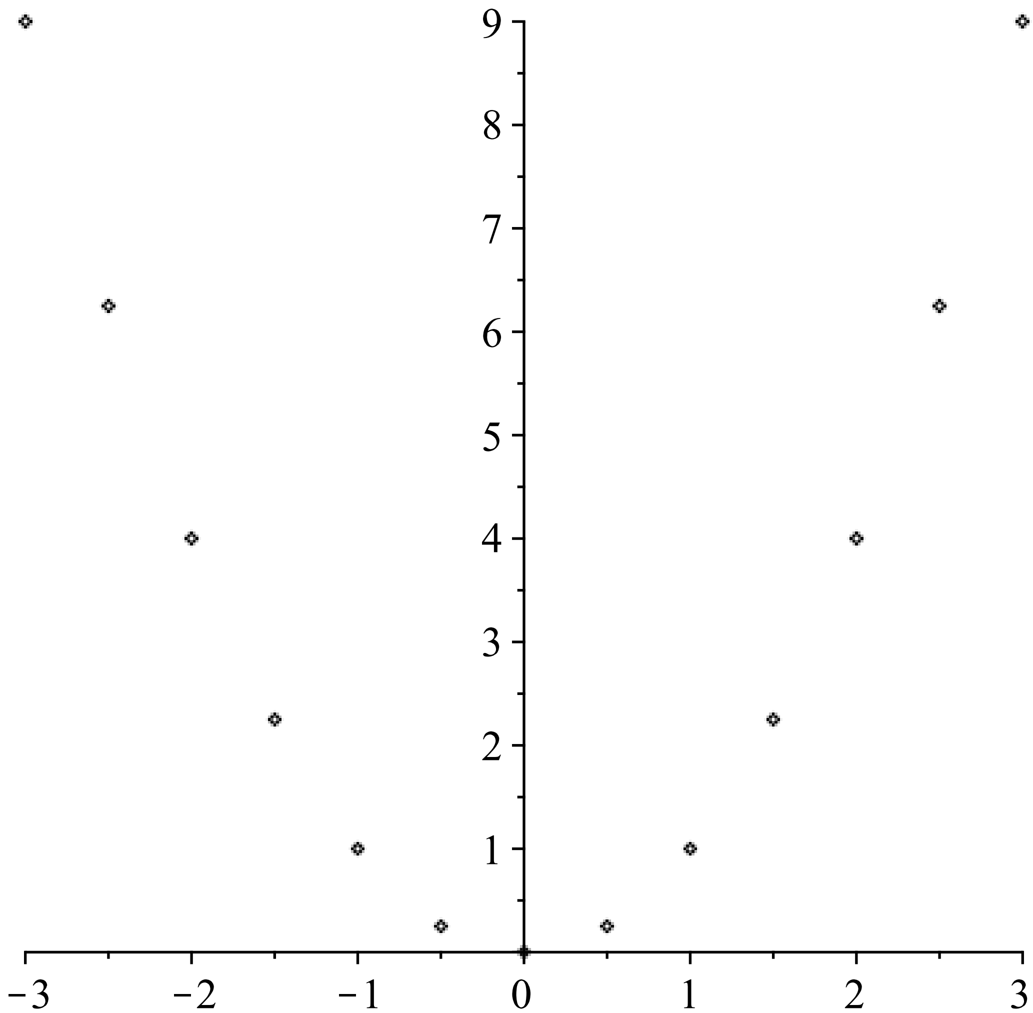
$Punkte := seq([x, x^2], x = -3..3, 0.5):$

$$Punkte$$

$$[-3, 9], [-2.5, 6.25], [-2.0, 4.00], [-1.5, 2.25], [-1.0, 1.00], [-0.5, 0.25], [0., 0.], [0.5, 0.25], [1.0, 1.00], [1.5, 2.25], [2.0, 4.00], [2.5, 6.25], [3.0, 9.00] \tag{2}$$

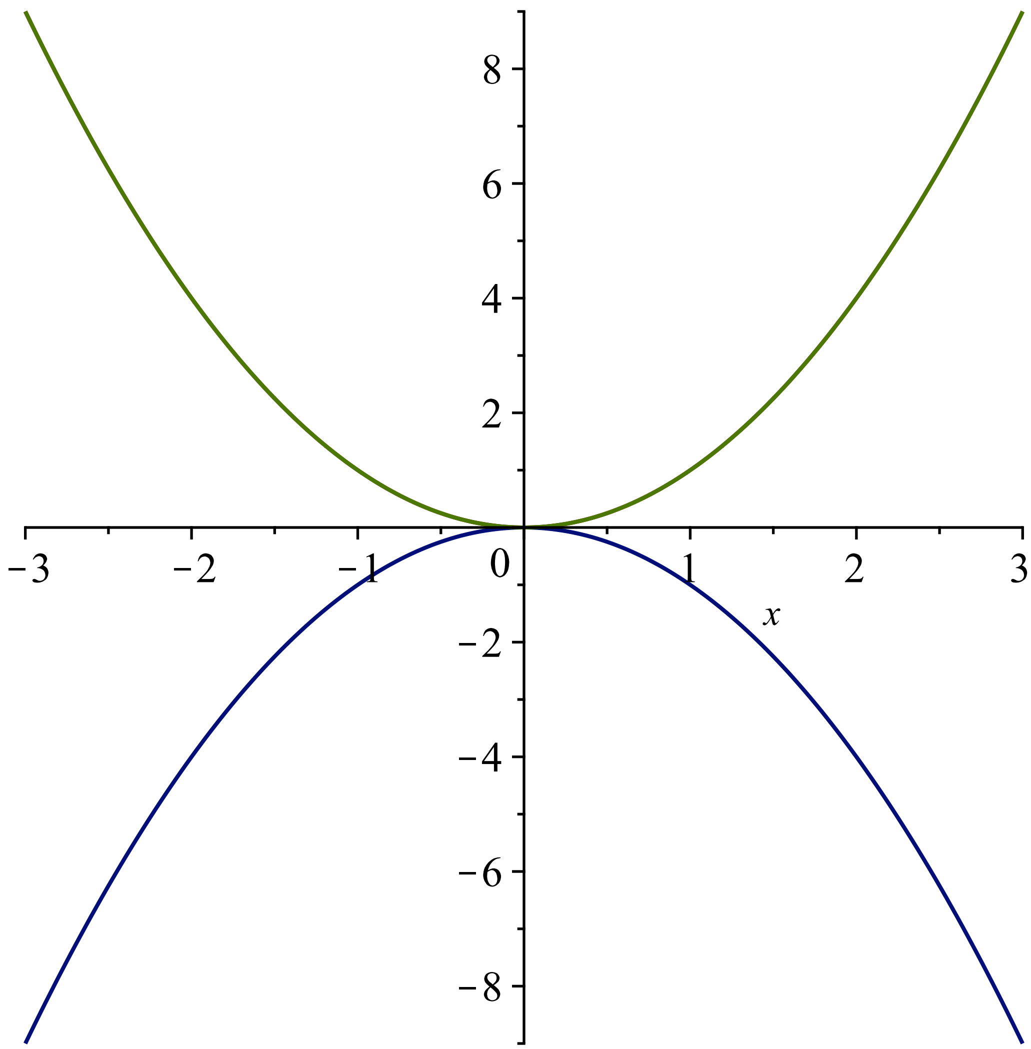
Dies ergibt folgenden Punktplot:

$pointplot([Punkte]);$



Verbindet man die eingezeichneten einzelnen Punkte stetig mit einem Kurvenlineal, so erhalten wir folgende Darstellung:

$plot([x^2, -x^2], x = -3 .. 3);$



Die wichtigsten Eigenschaften dieser Kurve - ein einer quadratischen Gesetzmäßigkeit gehorchender Kurvenverlauf wird auch **Parabel** genannt -sind:

Die Kurve geht durch den Nullpunt und kulminiert dort (bei positivem Term/rote Kurve: Minimum bei x=0,y=0   bei negativem Term/blau Maximum bei x=0,y=0)

Ansonsten schneiden die Kurven weder die x-Achse noch die y-Achse.

Die Kurven sind symetrisch zur y-Achse, erkennbar daran dass f(x)=f(-x)

Wurfparabel und Anwendung der Faktorisierung zur Aufgabenlösung

Wir ändern nun die Formel der Parabel in

$h = -2 \cdot t^2 + 5 \cdot t + 3$

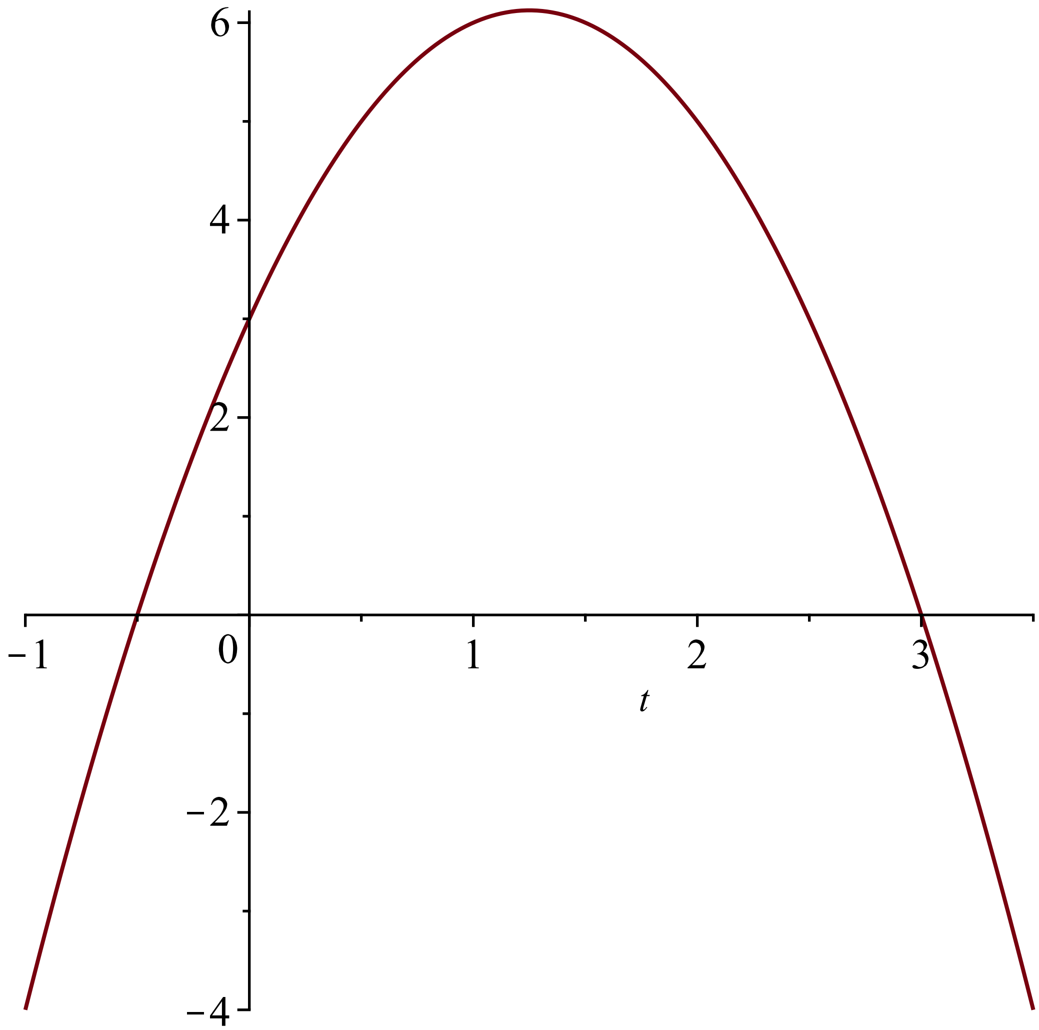
$$h = -2\,t^2 + 5\,t + 3 \tag{3}$$

Dabei soll t die Zeit in sec und h die Höhe einer Kugel darstellen, die unter einer am Ort existierenden bestimmten Schwerkraft mit einer bestimmten Geschwindigkeit und einem bestimmten Wurfwinkel und Abwurfhöhe (prüfen Sie nach, dass die Abwurfhöhe offensichtlich 3 (km,Meilen oder was auch immer) ist, zur Zeit t=0 (Beginn der Zeitmessung des Wurf Experiments) geworfen wird. Negative Zeiten sind im aktuellen Experiment zwar nicht erlaubt, der Kurvenverlauf wird hier trotzdem auch für negative x-Werte eingezeichnet.

Die Ableitung dieser Formel ist Sache der Physik.

Die sich ergebende Kurve - **eine typische Wurfparabel** - stellt sich wie folgt dar:

$plot([-2t^2+5t+3], t=-1..3.5)$



Daraus kann z.B. die Wurfweite (in m,Km, Meilen usw.) sowie die maximale Höhe der parabolischen Laufbahn und dessen Zeitpunkt wenigstens angenähert entnommen werden. Die Wurfweite ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Kurve mit der t-Achse (die Kugel ist auf dem Boden angekommen und hat damit die Höhe h=0).

Der Zeitpunkt in dem die Parabel ihr Maximum erreicht, liegt genau zwischen dem ersten und dem zweiten Schnittpunkt mit der t-Achse, da bei diesem Wert für t die Symetrieachse der Parabel liegt.

Ohne weiteren Aufwand erhalten wir alle notwendigen Ergebniss rechnerisch, wenn wir die Parabel nicht in der Grundform sondern als faktorisierte Formel darstellen:

Wir nehmen dies den späteren Ausführungen vorweg und schreiben hier einfach hin:

$$h = -(2\,t+1)\,(t-3)$$

Prüfen Sie durch Ausmultiplikation des Ausdrucks einfach nach, ob die Formel richtig ist.

Die Zeitpunkte für h=0 erhalten wir nun ganz einfach, da h=0 ist, wenn einer der beiden Faktoren oder beide gleich 0 sind.
Daraus ergibt sich (2*t+1)= 0 t=-1/2 und t-3=0 t=3. Die Symetrieachse liegt bei (3+(-1/2))/2. Dies ergibt t=1.25 und in die Ursprungsformel eingestzt errechnet sich die maximale Höhe der Wurfparabel zu 6.125. Vergleichen Sie dies mit dem obigen Kurvenverlauf?